8. Arbori

8.1. Arbori generalizați

8.1.1. Definiții

- În definirea **noțiunii de arbore** se pornește de la noțiunea de **vector**.

  - Fie **V** o mulțime având elementele a_1, a_2,....a_n.

  - Pe mulțimea **V** se poate defini o așa numită **"relație de precedență"** în felul următor: se spune că a_i precede pe a_j dacă i < j. Aceasta se notează: $a_i \prec a_j$.

  - Se poate verifica ușor că relația astfel definită are următoarele proprietăți, valabile pentru structura de vector:

---

(1) Oricare ar fi $a \in \mathbf{V}$ avem $a \nprec a$. (S-a notat cu $\nprec$ relația "nu precede");
(2) Dacă $a \prec b$ și $b \prec c$ atunci $a \prec c$ (tranzitivitate); [8.1.1.a]
(3) Oricare ar fi $a \in \mathbf{V}$ și $b \in \mathbf{V}$, dacă $a \neq b$ atunci avem fie $a \prec b$ fie $b \prec a$.

- Din proprietățile (1) și (2) rezultă că relația de precedență **nu** determină în **V** **"bucle închise"**, adică **nu** există nici o secvență de elemente care se preced două câte două și în care ultimul element este același cu primul, cum ar fi de exemplu $a \prec b \prec c \prec d \prec a$.

- Proprietatea (3) precizează că relația de precedență este definită pentru **oricare** două elemente a și b ale lui **V**, cu singura condiție ca $a \neq b$.

- Fie **V** o mulțime finită peste elementele căreia s-a definit o relație de precedență, stabilind referitor la fiecare pereche de elemente, care dintre ele îl precede pe celălălalt.

  - Dacă această relație posedă proprietățile [8.1.1.a], atunci ea **imprima** peste mulțimea **V** o **structură de vector** (fig.8.1.1.a).

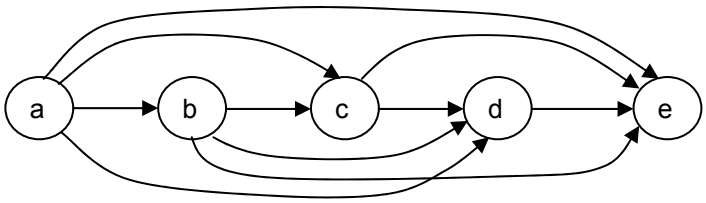


Fig. 8.1.1.a. Structură de vector

- În figura 8.1.1.b apare o altă reprezentare intuitivă a unei structuri de **vector**. Săgețile din figură indică relația **"succesor".**

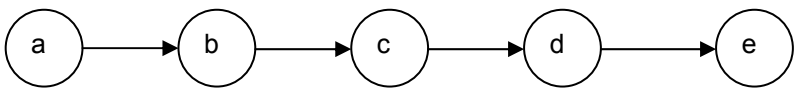


Fig.8.1.1.b. Relația succesor

- Această relație se definește cu ajutorul relației de precedență după cum urmează: dacă între elementele a şi b ale lui **V** este valabilă relația $a \prec b$ şi nu există nici un $c \in \mathbf{V}$ astfel ca $a \prec c \prec b$ atunci se zice că b este **succesorul** lui a.

- Se observă că relația "**succesor**" (mulțimea săgeților din figura 8.1.1.b.), **precizează** relația "**precedență**" fără a fi însă **identică** cu ea. Spre exemplu, există relația $b \prec e$ (prin tranzitivitate), dar nici o săgeată nu conectează pe b cu e.

- În figura8.1.1.c apare o aşa numită **structură de arbore** care se definește prin **generalizarea** structurii de **vector**.

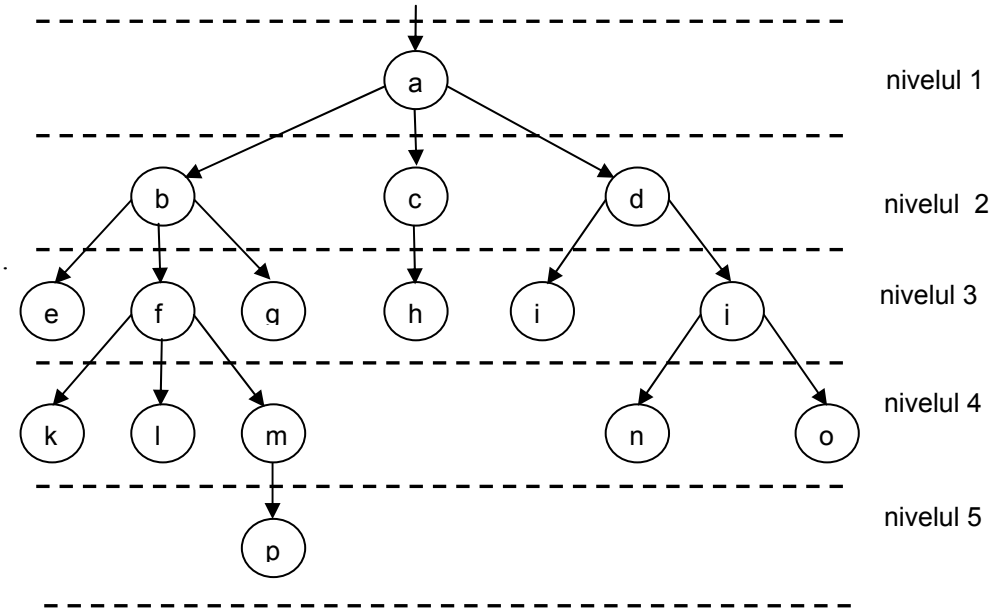


Fig. 8.1.1.c. Structură de arbore

- Astfel, dacă în cazul **vectorului**, **toate elementele** cu excepția ultimului au **exact** un **succesor**, la **structura de arbore** se admite ca **fiecare element** să aibă un **număr oarecare** de **succesori**, inclusiv zero, cu **restricția** ca două elemente distincte să **nu** aibă acelaşi succesor.
- Relația **succesor** definește o relație de **precedență** pe structura de arbore. Astfel, din figura avem $b \prec p$, $d \prec n$, etc.

- **Relația de precedență** definită pe structura de arbore se bucură de proprietățile (1) şi (2) de la [8.1.1.a] dar **nu** satisface proprietatea (3).
    - Într-adevăr în figura 8.1.1.c, pentru elementele b şi c **nu** este valabilă nici una din relațiile $b \prec c$ sau $c \prec b$, la fel pentru elementele d şi k. Prin urmare, relația de precedență este definită numai pentru **o parte** a perechilor de elemente ale arborelui, cu alte cuvinte este o **relație parțială**.

- În general, o **structură de arbore** se definește ca o mulțime **A** de $n \leq 0$ noduri de acelaşi tip, peste care s-a definit o relație de precedență având proprietățile (1) şi (2) de la [8.1.1.a] precum şi următoarele două proprietăți [8.1.1b]:

    - (3) Oricare ar fi $b,c \in \mathbf{A}$, astfel încît $b \nprec c$ şi $c \nprec b$, dacă $b \prec d$ şi $c \prec e$ atunci $d \neq e$. Cu alte cuvinte, două elemente oarecare între care **nu** există relația de precedeță **nu** pot avea acelaşi succesor. [8.1.1.b]

- (4) Dacă **A nu** este vidă (n >0) atunci există un element numit **rădăcină**, care precede toate celelalte elemente.

- Pentru structura de arbore se poate formula şi o altă definiție echivalentă cu cea de mai sus.

- Prin **arbore**, se înțelege o mulțime de $n \geq 0$ noduri de acelaşi tip, care dacă **nu** este vidă, atunci are un anumit nod numit **rădăcină**, iar restul nodurilor formează **un număr finit de arbori**, doi câte doi **disjuncți**.

- Se constată că atât această definiție, cât şi structura pe care o defineşte, sunt **recursive**, lucru deosebit de important deoarece permite prelucrarea simplă a unei astfel de structuri cu ajutorul unor **algoritmi recursivi**.

- În continuare se vor defini câteva **noțiuni** referitoare la arbori.

- Prin **subarborii** unui arbore, se înțeleg arborii în care se descompune acesta prin îndepărtarea rădăcinii.

    - Spre exemplu arborele din figura 8.1.1.c, după îndepărtarea rădăcinii a, se descompune în trei subarbori având rădăcinile respectiv b,c şi d.

- Oricare nod al unui arbore este rădăcina unui **arbore parțial**.

    - Spre exemplu în aceeaşi figură, f este rădăcina arborelui parțial format din nodurile f, k, l, m şi p.

- Un arbore parțial **nu** este întotodeauna **subarbore** pentru arborele complet, dar orice **subarbore** este un **arbore parțial**.

- Într-o structură de arbore, succesorul unui nod se mai numeşte şi **"fiul"** sau **"urmaşul"** său.

- Dacă un nod are unul sau mai mulți fii, atunci el se numeşte **"tatăl"** sau **"părintele"** acestora.

- Dacă un nod are mai mulți fii, aceştia se numesc **"frați"** între ei.

    - Spre exemplu în fig. 8.1.1.c nodul b este tatăl lui e, f şi g care sunt frați între ei şi sunt în acelaşi timp fiii lui b.

- Se observă că într-o structură de arbore, **arborele parțial** determinat de orice nod diferit de rădăcină, este **subarbore** pentru **arborele parțial** determinat de tatăl său.

    - Astfel f este tatăl lui m, iar arborele parțial determinat de m este subarbore pentru arborele parțial determinat de f.

- Într-o structură de arbore se definesc **niveluri** în felul următor: rădăcina formează nivelul 1, fiii ei formează nivelul 2 şi în general fiii tuturor nodurilor nivelului n formează nivelul n+1 (fig.8.1.1.c).

- Nivelul maxim al nodurilor unui arbore se numeşte **înălțimea** arborelui.

- Numărul fiilor unui nod defineşte **gradul** nodului respectiv.

- Un nod de grad zero se numeşte nod **terminal (frunză)**, iar un nod de grad diferit de zero, nod **intern**.

- **Gradul** maxim al nodurilor unui arbore se numeşte **gradul arborelui**.

    - Arborele din figura 8.1.1.c are înălțimea 5, nodul d este de grad 2, nodul h este terminal, f este un nod intern iar gradul arborelui este 3.

- Dacă n_1, n_2,....,n_k este o **secvență** de noduri aparținând unui arbore, astfel încât n_i este părintele lui n_{i+1} pentru $1 \leq i < k$, atunci această secvență se numeşte **"drum"** sau **"cale"** de la nodul n_1 la nodul n_k.

- **Lungimea** unui **drum** este un întreg având valoarea egală cu numărul de ramuri (săgeți) care trebuiesc traversate pentru a ajunge de la rădăcină la nodul respectiv.

- Rădăcina are lungimea drumului egală cu 1, fiii ei au lungimea drumului egală cu 2 şi în general un nod situat pe nivelul i are lungimea drumului i.

    - Spre exemplu, în figura 8.1.1.c, lungimea drumului la nodul d este 2 iar la nodul p este 5.

- Dacă există un drum de la nodul a la nodul b, atunci nodul a se numeşte **strămoş** sau **ancestor** al lui b, iar nodul b **descendent** sau **urmaş** al lui a.

    - Spre exemplu în aceeaşi figură, strămoşii lui f sunt f, b şi a iar descendenții săi f, k, l, m şi p.

- Conform celor deja precizate **tatăl** unui nod este **strămoşul său direct** (**predecesor**) iar **fiul** unui nod este **descendentul său direct** (**succesor**).

- Un strămos respectiv un descendent al unui nod, altul decât nodul însuşi, se numeşte **strămoş propriu** respectiv **descendent propriu**.

- Într-un arbore, **rădăcina** este **singurul nod** fără **nici** un strămoş propriu.

- Un nod care **nu** are descendenți proprii se numeşte **nod terminal (frunză).**

- **Înălțimea** unui nod într-un arbore este **lungimea celui mai lung drum** de la **nodul respectiv** la un **nod terminal**.

- Pornind de la această definiție, **înălțimea** unui arbore se poate defini şi ca fiind egală cu **înălțimea nodului rădăcină**.

- **Adîncimea** unui nod este egală cu lungimea **drumului unic** de la rădăcină la acel nod.

- În practică se mai defineşte şi **lungimea drumului unui arbore** numită şi **lungimea drumului intern**, ca fiind egală cu suma lungimilor drumurilor corespunzătoare tuturor nodurilor arborelui.

- Formal, **lungimea medie a drumului intern al unui arbore**, notată cu $\mathbf{P_I}$ se defineşte cu ajutorul formulei [8.1.1.c].

$$P_I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h} n_i * i$$

unde n = numărul total de noduri

i = nivelul nodului [8.1.1.c]

n_i =numărul de noduri pe nivelul i

h = înalțimea arborelui

8.1.2. Tipul de date abstract arbore generalizat

- La fel ca şi în cazul altor tipuri de structuri de date, este dificil de stabilit un set de operatori care să fie valabil pentru toate aplicațiile posibile ale structurilor de **tip arbore**.

- Cu toate acestea, din mulțimea operatorilor posibili se recomandă pentru **TDA Arbore** generalizat forma prezentată în secvența [8.1.2.a].

TDA Arbore generalizat

Modelul matematic: arbore definit în sens matematic. Elementele arborelui aparțin unui aceluiaşi tip, numit şi *tip de bază*.

Notații:

TipNod - tipul unui nod al arborelui;
TipArbore - tipul arbore;
TipCheie - tipul cheii unui nod;
N: TipNod;
A: TipArbore;
v: TipCheie; [8.1.2.a]

Operatori:

1. ***Tata****(N: TipNod, A:TipArbore): TipNod;* - operator care returnează tatăl (părintele) nodului *N* din arborele *A*. Dacă *N* este chiar rădăcina lui *A* se returnează "nodul vid";

2. ***PrimulFiu****(N: TipNod, A: TipArbore): TipNod;* - operator care returnează cel mai din stânga fiu al nodului *N* din arborele *A*. Dacă *N* este un nod terminal, operatorul returnează "nodul vid".

3. ***FrateDreapta****(N: TipNod, A:TipArbore): TipNod;* operator care returnează nodul care este fratele drept *"imediat"* al nodului *N* din arborele *A*. Acest nod se defineşte ca fiind nodul *M* care are acelaşi părinte *T* ca şi *N* şi care în reprezentarea arborelui apare imediat în dreapta lui *N* în ordonarea de la stânga la dreapta a fiilor lui *T*.

4. ***Cheie****(N: TipNod, A: TipArbore): TipCheie;* - operator care returnează cheia nodului *N* din arborele *A*.

5. ***Creeaza$_i$***`(v: TipCheie, A`$_1$`,A`$_2$`,...,A`$_i$`: TipArbore): TipArbore;` este unul din operatorii unei familii, care are reprezentanți pentru fiecare din valorile lui *i=0,1,2,..* Funcția ***Creeaza$_i$*** generează un nod nou *R*, care are cheia *v* şi căruia îi asociază *i* fii. Aceştia sunt respectiv subarborii A_1, A_2,...,A_i. În final se generează de fapt un arbore nou având rădăcina *R*. Dacă *i=0*, atunci *R* este în acelaşi timp rădăcina şi nod terminal.

6. ***Radacina****(A: TipArbore): TipNod;* - operator care returnează nodul care este rădăcina arborelui *A* sau "nodul vid" dacă *A* este un arbore vid.

7. ***Initializeaza****(A: TipArbore): TipArbore;* - crează arborele *A* vid.

8. ***Insereaza****(N: TipNod, A: TipArbore, T: TipNod);* - operator care realizează inserția nodului *N* ca fiu al nodului *T* în arborele *A*. În particular se poate preciza şi poziția nodului în lista de fii ai tatălui *T* (prin convenție se acceptă sintagma *"cel mai din dreapta fiu"*).

9. ***Suprima****(N: TipNod, A: TipArbore);* - operator care realizează suprimarea nodului *N* şi a descendenților săi din arborele *A*. Suprimarea se poate defini diferențiat funcție de aplicația în care este utilizată structura de date în cauză.

10. ***Inordine****(A: TipArbore, ProcesareNod(...): TipProcedura);* - procedură care parcurge nodurile arborelui *A* în *"inordine"* şi aplică fiecărui nod procedura de prelucrare *ProcesareNod*.

11. ***Preordine****(A: TipArbore, ProcesareNod(...): TipProcedura);* - procedură care parcurge nodurile arborelui *A* în *"preordine"* şi aplică fiecărui nod procedura de prelucrare *ProcesareNod*.

12. ***Postordine****(A: TipArbore, ProcesareNod(...): TipProcedura);* - procedură care parcurge nodurile arborelui *A* în *"postordine"* şi aplică fiecărui nod procedura de prelucrare *ProcesareNod*.

- Structura **arbore generalizat** este **importantă** deoarece apare frecvent în **practică**, spre exemplu arborii familiali, sau structura unei cărți defalcată pe capitole, secțiuni, paragrafe şi subparagrafe.

- Din punctul de vedere al reprezentării lor în memorie, **arborii generalizați** au marele **dezavantaj** că **au noduri de grade diferite**, ceea ce conduce la **structuri neuniforme** de date sau la **structuri uniforme parțial utilizate**.

8.1.3. Traversarea arborilor generalizați

- Una din activitățile fundamentale care se execută asupra unei structuri arbore este **traversarea** acesteia.

- Ca şi în cazul listelor liniare, prin **traversarea** unui arbore se înțelege execuția unei anumite operații asupra tuturor nodurilor arborelui.

- În timpul traversării, nodurile sunt **vizitate** într-o anumită **ordine**, astfel încât ele pot fi considerate ca şi cum ar fi integrate într-o listă liniară.

- Descrierea şi înțelegerea celor mai mulți algoritmi este mult uşurată dacă în cursul prelucrării se poate preciza **elementul următor** al structurii arbore, respectiv se poate **liniariza** structura arbore.

- În principiu tehnicile de traversare a arborilor generalizați se încadrează în **două** mari categorii:

    - (1) Tehnici bazate pe **căutarea în adîncime** (**"depth-first search"**)

    - (2) Tehnici bazate pe **căutarea prin cuprindere** (**"breadth-first search"**).

- Aceste tehnici îşi au sorgintea în traversarea structurilor de date **graf**, dar prin particularizare sunt aplicabile şi altor categorii de structuri de date, respectiv structurii de date **arbore generalizat**.

8.1.3.1. Traversarea arborilor generalizați prin tehnici bazate pe căutarea în adâncime: preordine, inordine şi postordine

- **Principiul căutării în adâncime** (**depth-first search**) presupune:

    - (1) Parcurgerea **"în adâncime"** a structurii, prin îndepărtare de punctul de pornire, până cînd acest lucru **nu** mai este posibil.

    - (2) În acest moment se **revine** pe drumul parcurs până la proximul punct care permite o nouă posibilitate de înaintare în adâncime.

    - (3) Procesul **continuă** în aceeaşi manieră până când structura de date este parcursă în întregime.

- Există trei moduri de **traversare** (**liniarizare**) care se referă la o structură de date arbore generalizat, bazate pe căutarea în adâncime şi anume:

    - **(1) Traversarea în preordine**

    - **(2) Traversarea în inordine**

    - **(3) Traversarea în postordine**

- Cele trei modalități de traversare, se **definesc** de regulă în manieră **recursivă**, asemeni structurii de arbore şi anume, **ordonarea** unui arbore se defineşte presupunând că **subarborii** săi s-au ordonat **deja**.

    - Cum subarborii au noduri strict mai puține decât arborele complet, rezultă că, aplicând recursiv de un număr suficient de ori definiția, se ajunge la ordonarea unui arbore vid, care este evidentă.

- Cele trei moduri de traversare ale unui arbore generalizat **A** se definesc recursiv după cum urmează:

    - Dacă arborele **A** este **nul**, atunci ordonarea lui **A** în preordine, inordine şi postordine se reduce la **lista vidă**.

    - Dacă **A** se reduce la **un singur nod**, atunci nodul însuşi, reprezintă traversarea lui **A**, în oricare din cele trei moduri.

    - Pentru restul cazurilor, fie arborele **A** cu rădăcina **R** şi cu subarborii $\mathbf{A_1, A_2,..., A_k}$. (fig. 8.1.3.1.a):

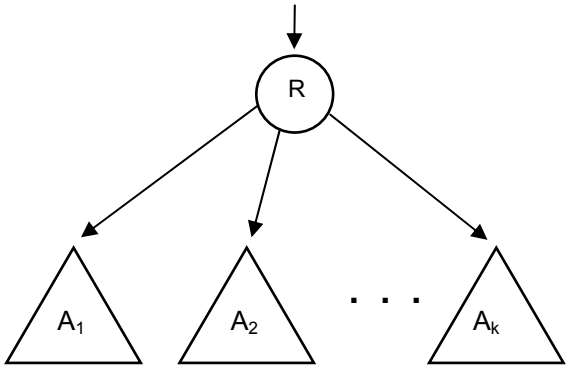


Fig.8.1.3.1.a. Structură de arbore generalizat

1°. Traversarea în **preordine** a arborelui **A** presupune:
- Traversarea rădăcinii **R**
- Traversarea în **preordine** a lui $\mathbf{A_1}$
- Traversarea în **preordine** a lui $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ şi aşa mai departe până la $\mathbf{A_k}$ inclusiv.

2°. Traversarea în **inordine** a arborelui **A** presupune:
- Traversarea în **inordine** a subarborelui $\mathbf{A_1}$
- Traversarea nodului **R**
- Traversările în **inordine** ale subarborilor $\mathbf{A_2, A_3,...,A_k}$.

3°. Traversarea în **postordine** a arborelui A constă în:
- Traversarea în **postordine** a subarborilor $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2, ...,A_k}$
- Traversarea nodului **R**.

- **Structurile de principiu** ale procedurilor care realizează aceste traversări apar în secvența [8.1.3.1.a] iar un exemplu de **implementare generică** în secvența [8.1.3.1.b].

{Traversarea arborelui generalizat - modalităţi principiale}

Preordine(A) :R,Preordine(A_1),Preordine(A_2),...,
Preordine(A_k).
Inordine(A) :Inordine(A_1),R,Inordine(A_2),...,
Inordine(A_k). [8.1.3.1.a]
Postordine(A):Postordine(A_1), Postordine(A_2),...,
Postordine(A_k),R.

{Traversarea în **Preordine** a arborelui generalizat}

```
procedure Preordine(r: TipNod);
  *listeaza(r);
 |pentru fiecare fiu f al lui r,(dacă există vreunul),
 |      în ordine de la stânga spre dreapta execută
 |   Preordine(f);
  □
```

{Traversarea în **Inordine** a arborelui generalizat}

```
procedure Inordine(r: TipNod);
  dacă *r este nod terminal atunci  *listează(r);
   |altfel                                          [8.1.3.1.b]
   |   Inordine(cel mai din stânga fiu al lui r);
   |   *listează(r);
   |    | pentru fiecare fiu f al lui r, cu excepţia celui
   |    |       mai din stânga, în ordine de la stânga spre
   |    |       dreapta execută
   |    |    Inordine(f);
   |     □
    □
```

{Traversarea în **Postordine** a arborelui generalizat}

```
procedure Postordine(r: TipNod);
 |pentru fiecare fiu f al lui r,(dacă există vreunul),
 |      în ordine de la stânga spre dreapta execută
 |   Postordine(f);
  □
  *listeaza(r);
```

- Spre exemplu pentru arborele din figura 8.1.3.1.b (a), traversările anterior definite, conduc la următoarele secvențe de noduri:

    - preordine: 1,2,3,5,8,9,6,10,4,7.
    - postordine: 2,8,9,5,10,6,3,7,4,1.
    - inordine: 2,1,8,5,9,3,10,6,7,4.

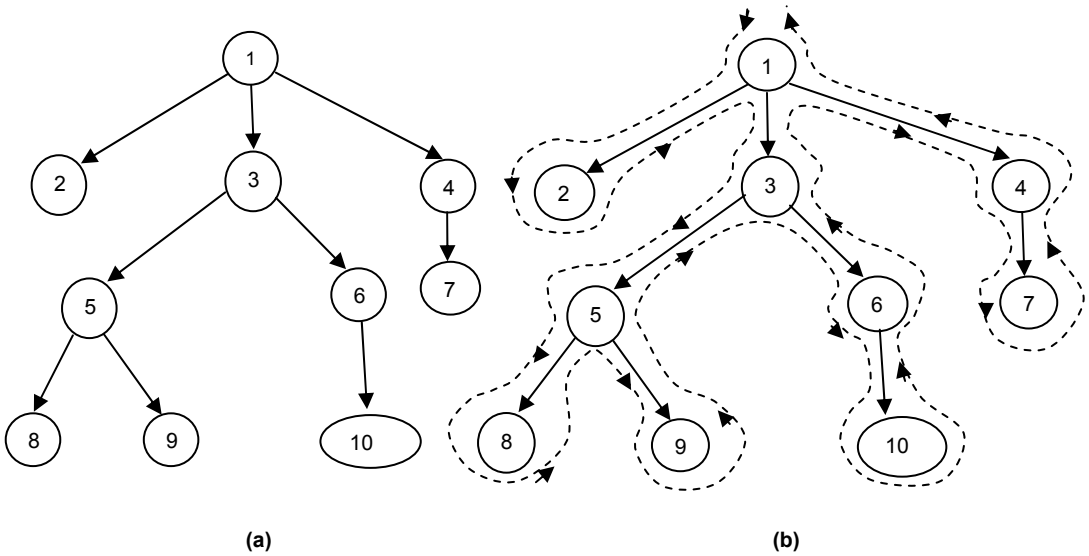


Fig.8.1.3.1.b. Traversarea unui arbore generalizat

- O **metodă practică simplă de parcurgere** a unui **arbore** este următoarea:

    - Dându-se o structură de arbore generalizat, se imaginează parcurgerea acesteia în sens trigonometric pozitiv, rămânând cât mai aproape posibil de arbore (fig.8.1.3.1.b (b)).

    - Pentru **preordine**, nodurile se listează de **prima** dată când sunt întâlnite: 1, 2, 3, 5, 8, 9, 6, 10, 4, 7;

    - Pentru **postordine** nodurile se listează **ultima** dată când sunt întîlnite, respectiv când sensul de parcurgere este spre părinții lor: 2, 8, 9, 5, 10, 6, 3, 7, 4, 1;

    - Pentru **inordine**, un **nod terminal** se listează când este întâlnit **prima** oară, iar un **nod interior** când este întâlnit **a doua oară**: 2, 1, 8, 5, 9, 3, 10, 6, 7, 4.

□----------

Exemplul 8.1.3.1.a. Implementarea **traversării în preordine** a unui **arbore** utilizând operatorii definiți în cadrul **TDA Arbore generalizat**, varianta recursivă.

- Procedura din secvența următoare realizează tipărirea în **preordine** a cheilor nodurilor arborelui generalizat **A**

- Procedura este apelată prin următorul apel:
  `TraversarePreordine(`*`Radacina`*`(A)).`

- Se presupune că nodurile arborelui sunt de tip `TipNod`.

```
PROCEDURE TraversarePreordine(r: TipNod);
{Implementare bazată pe setul de operatori TDA Arbore
generalizat}
{listeaza cheile descendentilor lui r in preordine}

  VAR f: TipNod;
    BEGIN
      Write(Cheie(r,a));
      f:=PrimulFiu(r,a);
      WHILE f<>0 DO
        BEGIN                                          [8.1.3.1.c]
          TraversarePreordine(f);
          f:=FrateDreapta(f,a)
        END
    END; {Preordine}
```

□----------□

Exemplul 8.1.3.1.b. Implementarea **traversării în preordine** a unui **arbore** utilizând operatorii definiți în cadrul **TDA Arbore generalizat**, varianta nerecursivă.

- Se presupune că nodurile arborelui sunt de tip `TipNod`.
- În cadrul variantei nerecursive se utilizează **stiva** `s`, care conține elemente de `TipNod`.
- Când se ajunge la prelucrarea nodului n, stiva va conține memorat **drumul** de la rădăcină la nodul n, cu rădăcina la baza stivei şi nodul n în vârf.
- Procedura care apare în secvența [8.1.3.1.d], are **două moduri de acțiune**.
  - (1) În **primul mod**, se descinde de-a lungul celui mai stâng drum neexplorat din cadrul arborelui, tipărind (**prelucrând**) nodurile întâlnite pe drum şi **introducându**-le în stivă, până se ajunge la un nod terminal.
  - (2) În acest moment se trece în cel de-**al doilea mod** de operare care presupune revenirea pe drumul memorat în stivă, **eliminând** pe rând nodurile, până la întâlnirea primului nod care are frate drept.
  - În acest moment se **revine** în primul mod şi reîncepe descinderea cu acest frate încă neexplorat.
  - Procedura începe în modul unu şi se termină când stiva devine vidă.

```
PROCEDURE TraversarePreordineNerecursiva(a: TipNod);
{Implementare nerecursiva bazata pe structura stiva}
{Se utilizează operatorii TDA Arbore generalizat, TDA Stiva}

  VAR m: TipNod;
      s: TipStiva;
      gata: boolean;

  BEGIN
    Initializează(s);
    m:=Radacina(a);
    gata:=false;
    WHILE NOT gata DO
```

```
      IF m<>0 THEN
          BEGIN
            Write(Cheie(m,a));
            Push(m,s);
            m:=PrimulFiu(m,a)  {explorează fiul stâng}
          END
        ELSE
          IF Stivid(s) THEN
              gata:=true                          [8.1.3.1.d]
            ELSE
              BEGIN
                m:=FrateDreapta(VarfSt(s),a);
                Pop(s)
              END
  END; {TraversarePreordineNerecursiva}
-------------------------------------------------------------□
```

8.1.3.2. Traversarea arborilor generalizați prin tehnica căutării prin cuprindere

- Tehnica căutării prin **cuprindere** derivă tot din traversarea **grafurilor**, dar ea este utilizată, e adevarat mai rar, şi la traversarea arborilor [Ko86].

- Se mai numeşte şi traversare pe niveluri (**"level traversal"**) [We94] şi este utilizată cu precădere în reprezentarea grafică a arborilor.

- **Principiul** acestei tehnici este simplu: nodurile nivelului i+1 al structurii arbore sunt vizitate **doar** după ce au fost vizitate toate nodurile nivelului i (0<i<h, unde h este înălțimea arborelui).

- Pentru implementarea acestei tehnici de parcurgere a arborilor generalizați, se utilizează drept structură de date suport, **structura coadă**.

- În secvența [8.1.3.2.a] apare schița de principiu a acestei traversări bazată pe **TDA Coadă.**

```
-------------------------------------------------------------
procedure TraversarePrinCuprindere(r: TipNod)
{Implementare bazată pe TDA Coadă}
  Coada: TipCoada;

  Initializeaza(Coada);
  daca r nu este nodul vid atunci
    Adauga(r,Coada);   {procesul de amorsare]
  Cât timp NOT Vid(Coada)execută                [8.1.3.2.a]
    r<-Cap(Coada); Scoate(Coada);
    *listeaza(r);
    pentru fiecare fiu y al lui r,(dacă există vreunul),
            în ordine de la stânga la dreapta execută
       Adauga(y,Coada);
    □
  □
□-------------------------------------------------------------
```

Exemplul 8.1.3.2. Implementarea **traversării prin cuprindere** a unui arbore utilizând operatorii definiți în cadrul **TDA Arbore generalizat** şi **TDA Coadă** este ilustrată în secvența [8.1.3.2.b]. Nodurile vizitate sunt afişate.

```
-------------------------------------------------------------
PROCEDURE TraversarePrinCuprindere(r: TipNod);
{Implementare bazată pe TDA Arbore generalizat, TDA Coada}

  VAR Coada: TipCoada;
      f: TipNod;
  BEGIN
    Initializeaza(Coada);
    Adauga(r,Coada);
    WHILE NOT Vid(Coada) DO
      BEGIN
        r:=Cap(Coada); Scoate(Coada);
        WRITE(Cheie(r));
        f:=PrimulFiu(r);
        IF f<> NIL THEN                                  [8.1.3.2.b]
          BEGIN
            Adauga(f,Coada);
            f:=FrateDreapta(f)
            WHILE f<> NIL DO
              BEGIN
                Adauga(f,Coada);
                f:=FrateDreapta(f)
              END
          END
      END
  END;{TraversarePrinCuprindere}
-------------------------------------------------------------
```

8.1.4. Tehnici de implementare a TDA arbore generalizat

- În cadrul acestui subcapitol se vor prezenta câteva din **implementările** posibile ale **structurii arbore generalizat**, corelate cu aprecieri referitoare la capacitatea acestora de a suporta operatorii definiți în cadrul **TDA Arbore generalizat**.

8.1.4.1. Implementarea arborilor generalizați cu ajutorul tablourilor

- Se bazează pe următoarea **metodă**:
  - Fie A un arbore generalizat cu n noduri.
  - Se numerotează nodurile arborelui A de la 1 la n.
  - Se asociază nodurilor arborelui elementele unui tablou A, astfel încât nodului i al arborelui îi corespunde locația A[i] din tablou.
  - Cea mai simplă manieră de reprezentare a unui arbore, care permite implementarea operației ***Tata***, este cea conform căreia fiecare intrare A[i] din tablou memorează un indicator (cursor) la **părintele** nodului i.
  - Rădăcina se poate distinge prin valoarea zero a cursorului.

- Cu alte cuvinte, dacă A[i] = j atunci nodul j este **părintele** nodului i iar dacă A[i]= 0, atunci nodul i este **rădăcina** arborelui.

- Acest mod de reprezentare, face uz de proprietatea arborilor care stipulează că orice nod are **un singur părinte**, motiv pentru care se numeşte şi **"indicator spre părinte"**.

- Găsirea părintelui unui nod se face într-un interval **constant** de timp **O***(1)* iar parcurgerea arborelui în direcţia nod - părinte, se realizează într-un interval de timp proporţional cu adîncimea nodului.

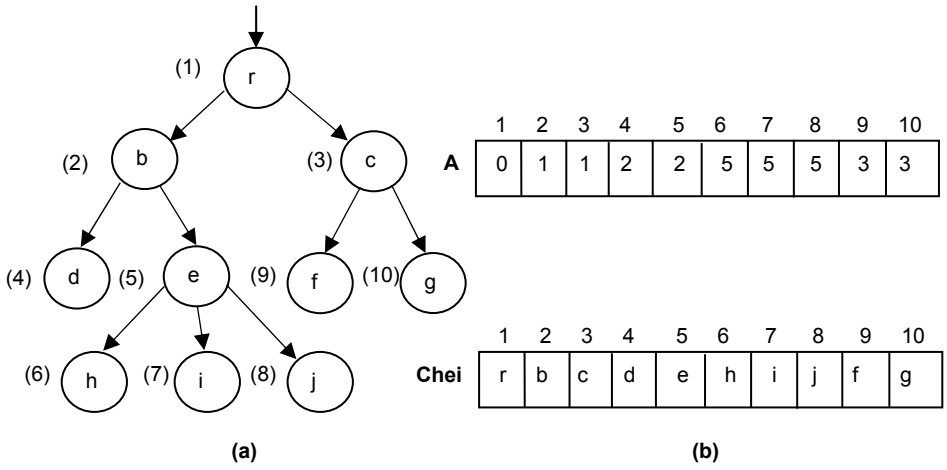


Fig. 8.1.4.1.a. Reprezentarea arborilor generalizaţi cu ajutorul tablourilor (varianta "indicator spre părinte")

- Această reprezentare poate implementa simplu şi operatorul ***Cheie*** dacă se adaugă un alt tablou `Chei`, astfel încât `Chei[i]` este cheia nodului `i`, sau dacă elementele tabloului A se definesc de tip articol având câmpurile `cheie` şi `cursor`.

- În figura 8.1.4.1.a apare o astfel de reprezentare (b) a aborelui generalizat (a).

- Reperezentarea "indicator spre părinte" are însă **dezavantajul** implementării dificile a operatorilor referitori la fii.

  - Astfel, unui nod dat n, i se determină cu dificultate fiii sau înălţimea.

  - În plus, reprezentarea "indicator spre părinte", **nu** permite specificarea ordinii fiilor unui nod, astfel încât operatorii ***PrimulFiu*** şi ***FrateDreapta*** **nu** sunt bine precizaţi.

  - Pentru a da **acurateţe** reprezentării, se poate impune o **ordine artificială** a nodurilor în tablou, respectând următoarele convenţii:

    (a) - numerotarea fiilor unui nod se face numai după ce nodul a fost numărat;

    (b) - numerele fiilor cresc de la stânga spre dreapta. Nu este necesar ca fiii să ocupe poziţii adiacente în tablou.

- În accepţiunea respectării acestor convenţii, în secvenţa [8.1.4.1.a] apare redactată funcţia ***FrateDrepta***.

- Tipurile de date presupuse sunt cele precizate în antetul procedurii. Se presupune că **nodul vid** este reprezentat prin zero.

```
{Implementarea Arborilor generalizați cu ajutorul tablourilor
varianta "Indicator spre părinte"}

TYPE TipNod=integer;
     TipArbore=ARRAY[1..maxnod] OF TipNod;

{Exemplu de implementare a operatorului FrateDreapta}

FUNCTION FrateDreapta(n: TipNod; a: TipArbore): TipNod;
  VAR i,parinte: TipNod;
  BEGIN
    parinte:=a[n];                          [8.1.4.1.a]
    FrateDreapta:=0;
    i:=n;
    REPEAT
      i:=i+1;
      IF a[i]=parinte THEN FrateDreapta:=i
    UNTIL(FrateDreapta<>0) OR (i=maxnod)
  END;{FrateDreapta}
```

8.1.4.2. Implementarea arborilor generalizați cu ajutorul listelor

- O manieră importantă şi utilă de implementare a arborilor generalizați este aceea de a crea pentru **fiecare nod** al arborelui **o listă** a fiilor săi.

- Datorită faptului că numărul fiilor poate fi **variabil**, o variantă potrivită de implementare o reprezintă utilizarea **listelor înlănțuite**.

- În fig.8.1.4.2.a se sugerează maniera în care se poate implementa arborele din figura 8.1.4.1.a.(a).

    - Se utilizează un **tablou** `(inceput)` care conține câte o locație pentru fiecare nod al arborelui.

    - Fiecare element al tabloului `inceput` este o referință la o **listă înlănțuită simplă**, ale cărei elemente sunt nodurile fii ai nodului corespunzător intrării, adică elementele listei indicate de `inceput[i]` sunt fiii nodului `i`.

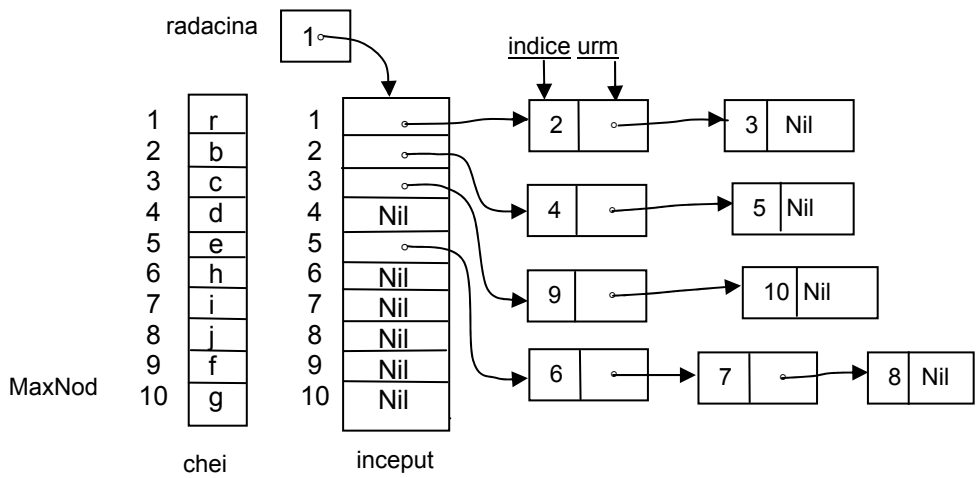


Fig.8.1.4.2.a. Reprezentarea arborilor generalizaţi cu ajutorul listelor înlănţuite

.

- În continuare se prezintă un exemplu de implemntare de implementare utilizând liste înlănţuite simple bazate pe pointeri

  - Tipurile de date propuse apar în secvenţa [8.1.4.2.a].

    - Se presupune că rădăcina arborelui este memorată în câmpul specific `radacina`.

    - Nodul vid se reprezintă prin valoarea `NIL`.

    - În aceste condiţii în secvenţa [8.1.4.2.b] apare implementarea operatorului ***PrimulFiu***.

    - Se presupune că se utilizează operatorii definiţi peste tipul de date abstract listă prezentaţi în Vol. 1, &6.2.1

```
-------------------------------------------------------------
{Reprezentarea arborilor generalizaţi utilizând liste
înlănţuite simple implementate cu ajutorul pointerilor}
TYPE TipPointreNod=^TipNodList;
     TipNodList=RECORD
          indice:1..MaxNod;
          urm   :TipPointerNod
     END;
     TipNod=0..MaxNod;                              [8.1.4.2.a]
     TipLista=TipPointerNod;
     TipArbore=RECORD
       inceput:ARRAY[1..MaxNod] OF TipLista;
       {chei:ARRAY[1..MaxNod] OF TipCheie;}
       radacina:TipNod
     END;
-------------------------------------------------------------
{Exemplu de implementare al operatorului PrimulFiu}
{se utilizează TDA Listă, varianta restrânsă}
FUNCTION PrimulFiu(n: TipNod; a: TipArbore): TipNod;
  VAR l: TipLista;
  BEGIN
    l:=a.inceput[n];                              [8.1.4.2.b]
    IF Fin(l) THEN  {n este un nod terminal}
        PrimulFiu:=0
      ELSE
        PrimulFiu:=Furnizeaza(Primul(l),l)
  END;{PrimulFiu}
-------------------------------------------------------------
```

8.1.4.3. Implementarea structurii arbore generalizat pe baza relaţiilor "primul-fiu" şi "frate-dreapta"

- Implementările structurilor de arbori generalizaţi, descrise până în prezent, printre alte **dezavantaje**, îl au şi pe acela de a **nu** permite implementarea simplă a operatorului ***Creaza*** şi deci de a **nu** permite dezvoltarea facilă a unor **structuri complexe** pornind de la **structuri simple**.

- Pentru a rezolva această problemă, pentru implementarea structurii arbore generarlizat se poate utiliza o structură ca cea din figura 8.1.4.3.b, în forma tabloului `Zona` care are următoarele caracteristici:

    - Fiecare nod al arborelui este identificat prin indexul celulei pe care el o ocupă în tabloul `Zona`

    - Alocarea nodurilor se realizează în manieră dinamică utilizând locația `Disponibil`. Nodurile disponibile se înlănțuie prin intermediul câmpului `primulFiu`

    - Câmpul `frateDreapta` indică fratele dreapta al nodului respectiv

    - Câmpul `primulFiu` indică primul fiu al nodului respectiv

    - Câmpul `tata` indică părintele nodului respectiv

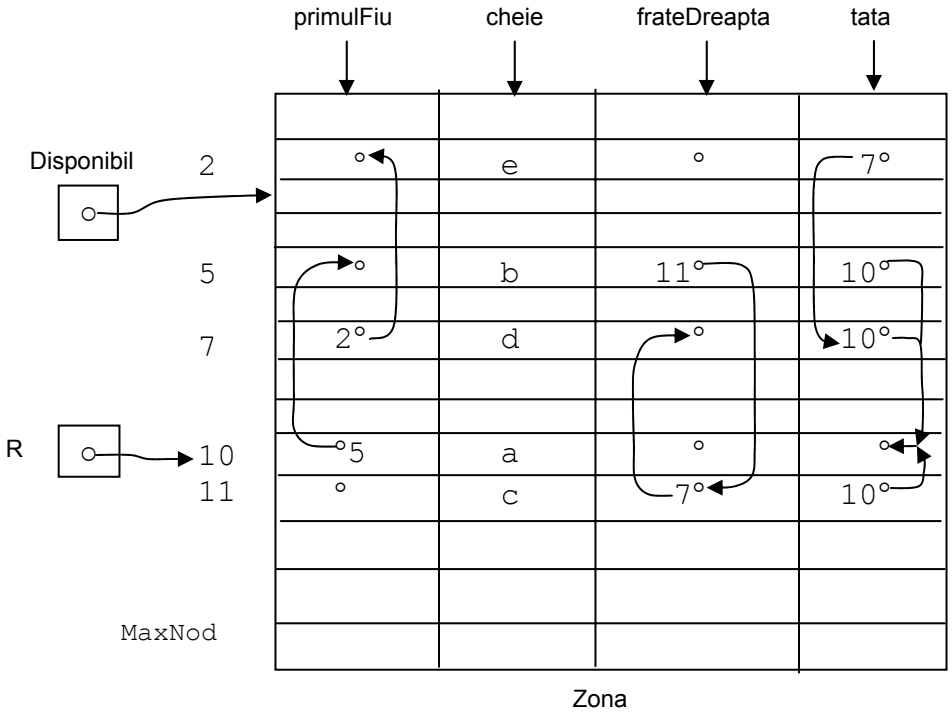


Fig.8.1.4.3.b. Reprezentarea unui arbore generalizat cu ajutorul relațiilor "primul-fiu" şi "frate-dreapta" (Varianta 2)

- O structură de date încadrată în `TipArbore`, este desemnată în aceste condiții printr-un **indice** în tabloul `Zona`, indice care indică nodul rădăcină al arborelui.

- În fig.8.1.4.3.b, apare reprezentarea arborelui din figura 8.1.4.3.a., iar în secvența [8.1.4.3.b] apare definiția formala a structurii de date corespunzătoare acestui mod de implementare al arborilor generalizați.

```
-------------------------------------------------------------
{Reprezentarea arborilor generalizaţi bazată pe relaţiile
primul-fiu şi frate-dreapta (Varianta 2)}

TYPE TipCursor=0..MaxNod;
     TipArbore=TipCursor;                          [8.1.4.3.b]
VAR  Zona:ARRAY[1..MaxNod] OF RECORD
                                 primulFiu:TipCursor;
```

```
                                    cheie:TipCheie;
                                    frateDreapta:TipCursor;
                                    tata:TipCursor
                                END;
    Disponibil:TipCursor;
    R:TipArbore;
-------------------------------------------------------------
```

- În secvența [8.1.4.3.c] este prezentat un exemplu de implementare a operatorului ***Creaza₂***, pornind de la reprezentarea propusă.

- Se reamintește că există o listă a liberilor în tabloul `Zona`, indicată prin cursorul `Disponibil`, în cadrul căreia elementele sunt înlănțuite prin intermediul câmpului `primulFiu`.

```
-------------------------------------------------------------
{Exemplu de implementare al operatorului Creaza₂}

FUNCTION Creaza2(v:TipCheie; t1,t2:TipArbore):TipArbore;
  VAR temp:TipCursor; {pastreaza indexul primei locatii
                       disponibile pentru radacina noului arbore}
  BEGIN
    temp:=Disponibil;
    Disponibil:=Zona[Disponibil].frateDreapta;
    Zona[temp].primulFiu:=t1;                    [8.1.4.3.c]
    Zona[temp].cheie:=v;
    Zona[temp].frateDreapta:=0;  Zona[temp].tata:=0;
    Zona[t1].frateDreapta:=t2;   Zona[t1].tata:=temp;
    Zona[t2].frateDreapta:=0;    Zona[t2].tata:=temp;
    Creaza2:=temp
  END; {Creaza2}
-------------------------------------------------------------
```

8.2. Arbori binari

8.2.1. Definiții

- Prin arbore binar se înțelege o mulțime de n ≥ 0 noduri care dacă nu este vidă, conține un anumit nod numit **rădăcină**, iar restul nodurilor formează doi arbori binari disjuncți numiți: **subarborele stâng** respectiv **subarborele drept**.

- Ca şi exemple pot fi considerați arborii binari reprezentați în figura 8.2.1.a.

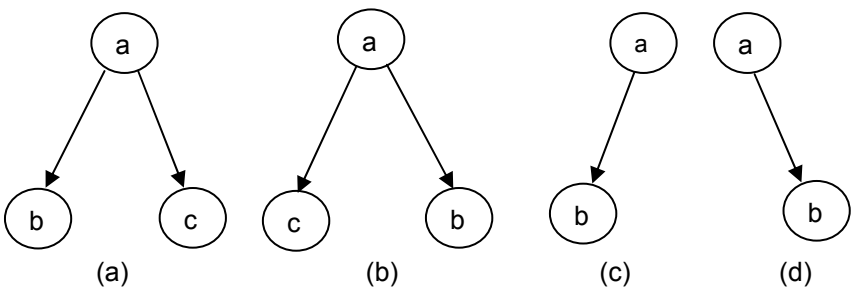


Fig.8.2.1.a. Structuri de arbori binari

- Structurile (a) şi (b) din fig.8.2.1.a. deşi conţin noduri identice, reprezintă arbori binari **diferiţi** deoarece se face o distincţie netă între subarborele stâng şi subarborele drept al unui arbore binar.

- Acest lucru este pus şi mai pregnant în evidenţă de structurile (c) şi (d) din fig.8.2.1.a. care de asemenea reprezintă arbori **diferiţi**.

    - O **expresie aritmetică** obişnuită poate fi reprezentată cu ajutorul unui arbore binar întrucît operatorii aritmetici sunt operatori binari..

    - Spre exemplu, pentru expresia (a+b/c)*(d/e*f), arborele binar corespunzător care se mai numeşte şi arbore de parcurgere **("parse tree"),** apare în figura 8.2.1.b.

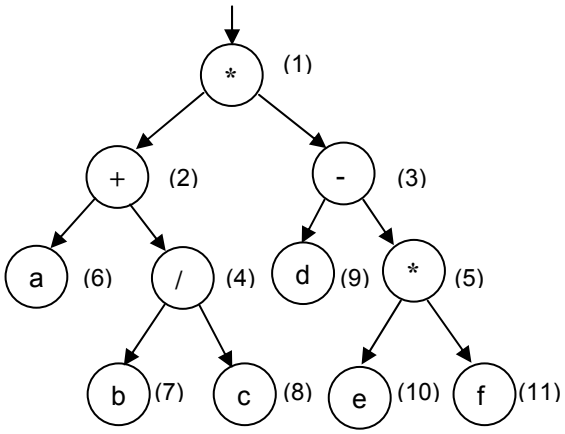


Fig.8.2.1.b. Arbore binar asociat unei expresii aritmetice

- Structura **arbore binar** este deosebit de importantă deoarece:
    - (1) Pe de o parte este uşor de reprezentat şi prelucrat, bucurându-se de o serie de proprietăţi specifice,
    - (2) Pe de altă parte, **orice** structură de arbore, poate fi transformată într-o structură de **arbore binar**.

8.2.2. Tehnica transformării unei structuri de arbore generalizat într-o structură de arbore binar.

- Fie un **arbore generalizat oarecare** A, care are rădăcina A_1 şi subarborii A_{11}, A_{12}...,A_{1k}.

- **Transformarea** acestuia într-un arbore binar se realizează după cum urmează:

    - Se ia A_1 drept rădăcină a arborelui binar,

    - Se face subarborele A_{11} fiul său stâng,

    - Apoi fiecare subarbore A_{1i} se face fiul drept al lui $A_{1,i-1}$ pentru $2 \le i \le k$.

    - Se continuă în aceeaşi manieră transformând după acelaşi algoritm fiecare din subarborii rezultaţi, până la parcurgerea integrală a arborelui iniţial.

- Grafic, această tehnică apare reprezentată în figura 8.2.2.a, (a)-cazul general şi (b)-un exemplu.

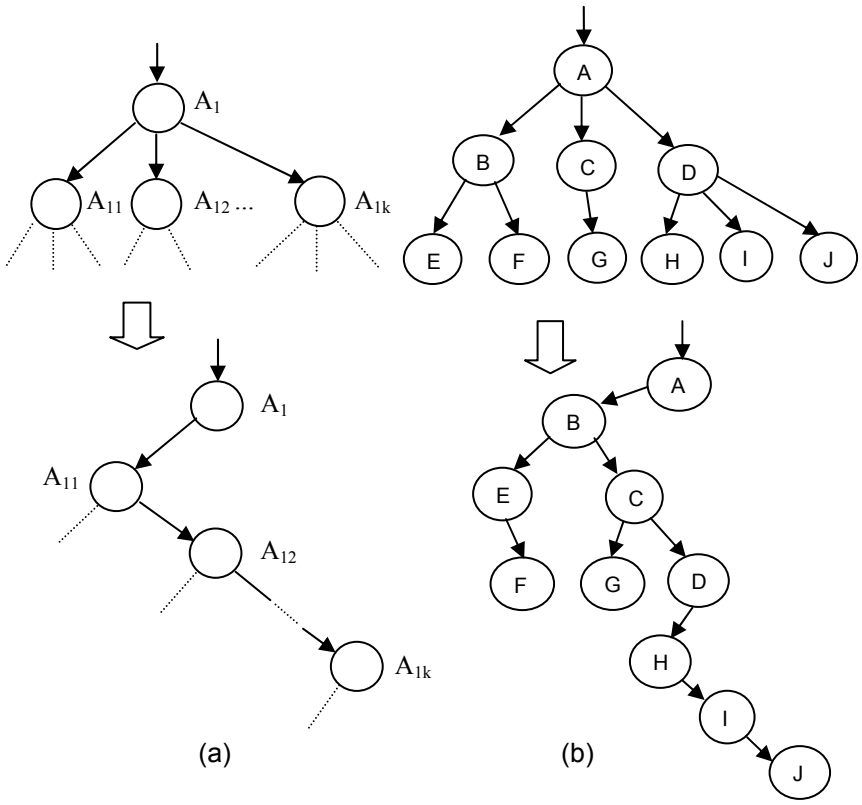


Fig.8.2.2.a. Transformarea unui arbore oarecare în arbore binar

8.2.3. TDA Arbore binar

- Tipul de date abstract arbore binar, ca de altfel orice TDA presupune:
  - **(1)** Definirea **modelului matematic** asociat structurii arbore binar
  - **(2)** definirea **setului de operatori** care gestionează structura.
- Ca şi în cadrul altor TDA-uri, este greu de stabilit un set de operatori care să ofere satisfacție în toate clasele de aplicații posibile.
- În cadrul cursului de față se propune pentru **TDA Arbore binar** forma prezentată în [8.2.3.a].

TDA Arbore binar

Modelul matematic: o structură de noduri. Toate nodurile sunt

de acelaşi tip. Fiecare nod este rădacina unui subarbore şi este alcătuit din trei câmpuri: element, indicator stâng şi indicator drept. Indicatorii precizează subarborele stâng respectiv subarborele drept al subarborelui în cauza. În cadrul câmpului element poate exista un câmp cheie care identifică nodul.

Notaţii:

TipNod - tipul asociat nodurilor arborelui
TipArboreBinar - tipul arbore binar
TipIndicatorNod - indicator la nod

```
t,s,d: TipArboreBinar;
r,n: TipIndicatorNod;
w: TipNod;
b: boolean;
```

[8.2.3.a]

Operatori:

1. ***CreazaArboreVid****(t: TipArboreBinar);* - procedură care crează arborele vid *t;*

2. ***ArboreVid****(t: TipArboreBinar): boolean;* - funcţie care returnează valoarea adevărat dacă arborele *t* este vid şi fals în caz contrar.

3. ***Radacina****(n: TipIndicatorNod): TipIndicatorNod;* - returnează indicatorul rădăcinii arborelui binar căruia îi aparţine nodul *n;*

4. ***Parinte****(n: TipIndicatorNod, t:TipArboreBinar) :TipIndicatorNod;* - returnează indicatorul Părintelui(tatălui) nodului *n* aparţinând arborelui *t;*

5. ***FiuStanga****(n: TipIndicatorNod,t:TipArboreBinar) :TipIndicatorNod;* - returnează indicatorul fiului stâng al nodului *n* aparţinând arborelui *t;*

6. ***FiuDreapta****(n: TipIndicatorNod,t: TipArboreBinar): TipIndicatorNod;* - returnează indicatorul fiului drept al nodului *n* aparţinând arborelui *t;*

7. ***SuprimaSub****(n: TipIndicatorNod,t: TipArboreBinar);* - suprimă subarborele a cărui radacină este nodul *n*, aparţinând arborelui binar *t;*

8. ***InlocuiesteSub****(n: TipIndicatorNod, r,t: TipArboreBinar);* - inserează arborele binar *r* în *t*, cu rădacina lui *r* localizată în poziţia nodului *n*, înlocuind subarborele indicat de *n.* Operatorul se utilizează de regulă când *n* este o frunză a lui *t*, caz în care poate fi asimilat cu operatorul *adaugă;*

9. ***Creaza2****(s,d: TipArboreBinar,r: TipIndicatorNod): TipArboreBinar;* - crează un arbore binar nou care are nodul *r* pe post de rădăcină şi pe *s* şi *d* drept subarbore stâng respectiv subarbore drept

10. ***Furnizeaza****(n: TipIndicatorNod,t: TipArboreBinar): TipNod;* - returnează conținutul nodului indicat de *n* din arborele binar *t*. Se presupune că *n* există în *t*;

11. ***Actualizeaza****(n: TipIndicatorNod, w: TipNod, t: TipArboreBinar);* - înlocuieşte conținutul nodului indicat de *n* din *t* cu valorea *w*. Se presupune că *n* există.

12. ***Cauta****(w: TipNod, t: TipArboreBinar): TipIndicatorNod;* returnează indicatorul nodului aparținând arborelui binar t, al cărui conținut este w;

13. ***Preordine****(t: TipArboreBinar,Vizitare(listaArgumente));* - operator care realizează parcurgerea în preordine a arborelui binar *t* aplicând fiecărui nod, procedura *Vizitare;*

14. ***Inordine****(t: TipArboreBinar, Vizitare(listaArgumente));* - operator care realizează parcurgerea în inordine a arborelui binar *t* aplicând fiecărui nod, procedura *Vizitare;*

15. ***Postordine****(t:TipArboreBinar,Vizitare(listaArgumente));* - operator care realizează parcurgerea în postordine a arborelui binar *t* aplicând fiecărui nod, procedura *Vizitare*.

8.2.4. Tehnici de implementare a arborilor binari

- În aplicațiile curente se utilizează **două** modalități de implementare a structurii arbore binar:
  - **(1)** Implementarea bazată pe **tablouri**, (mai rar utilizată)
  - **(2)** Implementarea bazată pe **pointeri**.

8.2.4.1. Implementarea arborilor binari cu ajutorul structurii tablou

- Pentru implementarea unui arbore binar se poate utiliza o structură de **tablou liniar** definit după cum urmează [8.2.4.1.a]:

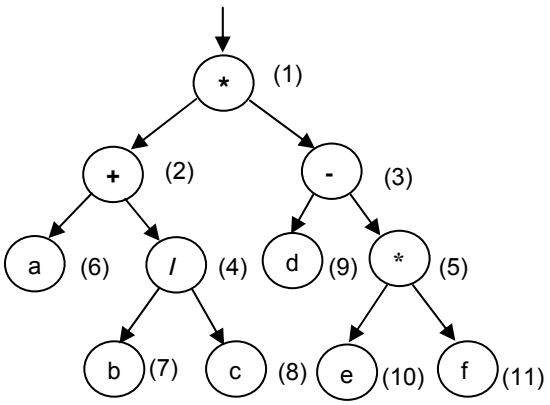
```
{Implementarea unui arbore binar cu ajutorul unei structuri
de tablou liniar}

TYPE TipCursor=0..MaxNod;
     TipElement=RECORD
                  Op:char;                          [8.2.4.1.a]
```

```
                    stang,drept:TipCursor
                END;
    TipArbore=ARRAY[TipCursor] OF TipElement;
VAR T:TipArbore;
```

- În prealabil fiecărui nod al arborelui i se asociază în mod **aleator** o intrare în tabloul liniar.

- În principiu, acesta este o implementare bazată pe **cursori**.

- În fig.8.2.4.1.a apare o astfel de reprezentare a unui arbore binar.



	Op	stang	drept
1	*	2	3
2	+	6	4
3	-	9	5
4	/	7	8
5	*	10	11
6	a	0	0
7	b	0	0
8	c	0	0
9	d	0	0
10	e	0	0
11	f	0	0

Fig.8.2.4.1.a. Reprezentarea unui abore binar cu ajutorul unui tablou liniar

- Un alt mod de reprezentare cu ajutorul structurilor de tip tablou se bazează pe următoarele două **leme**.

- **Lema 1**. Numărul maxim de noduri al nivelului `i` al unui arbore binar este 2^{i-1}.

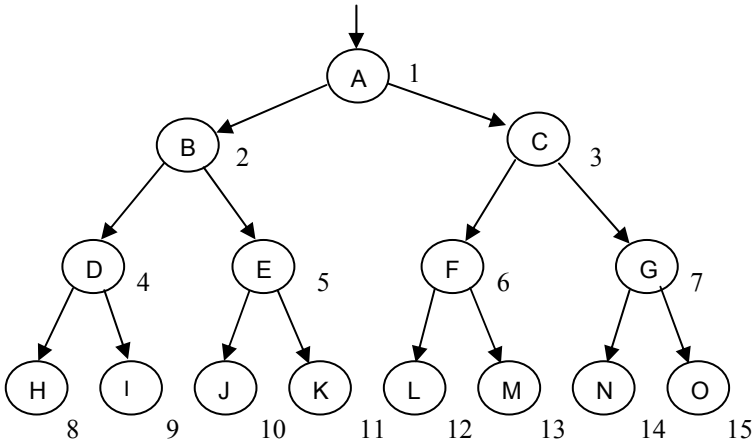
    - Ca atare, numărul maxim de noduri al unui arbore de înălțime `h` este [8.2.4.1.b].

$$NrMax = \sum_{i=1}^{h} 2^{i-1} = 2^h - 1 \quad \text{pentru} \quad h > 0 \qquad [8.2.4.1.b]$$

- Arborele binar de înălțime `h` care are exact 2^h-1 noduri se numeşte **arbore binar plin de înălțime h.**

- **Dacă** se **numerotează** secvențial nodurile unui arbore binar plin de înălțime `h`, începând cu nodul situat pe **nivelul** 1 şi continuând numărătoarea nivel cu nivel de **sus în jos**, şi în cadrul fiecărui nivel, de la **stânga la dreapta**;

- Se poate realiza o **implementare elegantă** a structurii de arbore binar, **asociind** fiecărui nod al arborelui, locația corespunzătoare numărului său într-un **tablou liniar** (fig.8.2.4.1.b .).



Arbore

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

Fig.8.2.4.1.b. Arbore binar plin şi reprezentarea sa cu ajutorul unui tablou liniar

- Lema următoare precizează maniera deosebit de simplă în care se poate determina părintele, fiul stâng şi fiul drept al unui nod precizat, fără memorarea explicită a nici unui fel de informație de legătură.

  - **Lema 2.** Dacă se reprezintă un **arbore binar complet** într-o manieră conformă cu cele anterior precizate, atunci pentru orice nod având indicele `i`, $1 \le i \le n$ sunt valabile relațiile:
    1. *`Parinte(i)`* este nodul având indicele $\lfloor i/2 \rfloor$ dacă $i \neq 1$. Dacă `i=1` nodul indicat de `i` este nodul rădăcină care nu are părinte.
    2. *`FiuStanga(i)`* este nodul având indicele `2*i` dacă $2*i \le n$. Dacă `2*i>n`, atunci nodul `i` nu are fiu stâng.
    3. *`FiuDreapta(i)`* este nodul având indicele `2*i+1` dacă $2*i+1 \le n$. Dacă `2*i+1>n`, atunci nodul `i` nu are fiu drept.

- Acest mod de implementare poate fi în mod evident utilizat pentru **orice structură** de arbore binar, în marea majoritate a cazurilor rezultând însă o utilizare **ineficientă** a zonei de memorie alocate tabloului.

- Spre exemplu în fig.8.2.4.1.d apare reprezentarea arborelui binar din fig.8.2.4.1.a. În acest caz se fac următoarele precizări:
  - `h` este **cea mai mică înălțime de arbore binar plin** care "cuprinde" arborele în cauză;
  - Se numerotează şi **nodurile lipsă** ale arborelui de reprezentat, ele fiind înlocuite cu nodul vid Φ în cadrul reprezentării.

Arbore

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
*	+	-	a	/	d	*	Φ	Φ	b	c	Φ	Φ	e	f

Fig.8.2.4.1.d. Reprezentarea secvențială a unui arbore binar oarecare

- Se remarcă similitudinea dintre acest mod de reprezentare şi reprezentarea **ansamblelor** (Vol.1 &3.2.5).

- Această manieră de reprezentare a arborilor binari suferă de **neajunsurile** specifice reprezentării bazate pe **tablouri liniare**:

    - **Inserția** sau **suprimarea** unui nod trebuie să fie însoțită de schimbarea poziției unor noduri din tablou, astfel încât acesta să reflecte modificările survenite prin pozițiile nodurilor rămase.

- **Concluzionând**, referitor la această manieră de implementare a arborilor binari se pot face următoarele precizări:

    - **Avantaje:** Simplitate, absența legăturilor; parcurgerea simplă a arborelui în ambele sensuri.

    - **Dezavantaje:** Implementarea complicată a modificărilor (inserții, suprimări).

    - **Se recomandă:** În cazul arborilor binari cu o dinamică redusă a modificărilor, în care se realizează multe parcurgeri sau cautări.

8.2.4.2. Implementarea arborilor binari cu ajutorul pointerilor

- Maniera cea mai naturală şi cea mai flexibilă de reprezentare a arborilor binari este cea bazată pe **TDA Indicator**.

- Acest mod de reprezentare are două **avantaje**:

    - Pe de-o parte înlătură **limitările** reprezentării secvențiale bazate pe structura tablou

    - Pe de altă parte face uz de proprietățile **recursive** ale structurii arbore, implementarea realizându-se cu ajutorul **structurilor de date dinamice**.

- Un arbore binar poate fi descris cu ajutorul unei structuri de date dinamice în variantă Pascal (secvența [8.2.4.2.a]) respectiv în variantă C (secvența [8.2.4.2.b]).

```
-----------------------------------------------------------
{Implementarea arborilor binari cu ajutorul pointerilor}

TYPE RefTipNod=^TipNod;
     TipNod=RECORD
          cheie:char;                          [8.2.4.2.a]
          stang,drept: RefTipNod
     END;
     TipArboreBinar= RefTipNod;
-----------------------------------------------------------
// implementare C

typedef struct nod
          {
               //diferite campuri
               char cheie;
               struct nod* stang;              [8.2.4.2.b]
```

```
        struct nod* drept;
    }NOD;
```

- În fig.8.2.4.2.a se **poate** urmări reprezentarea **arborelui binar** din figura 8.2.4.1.a bazată pe definiția din secvența [8.2.4.2.a.].

- Este uşor de văzut că practic **orice arbore** poate fi reprezentat în acest mod.

- În cadrul cursului de față, această modalitate de reprezentare va fi în mod preponderent utilizată.

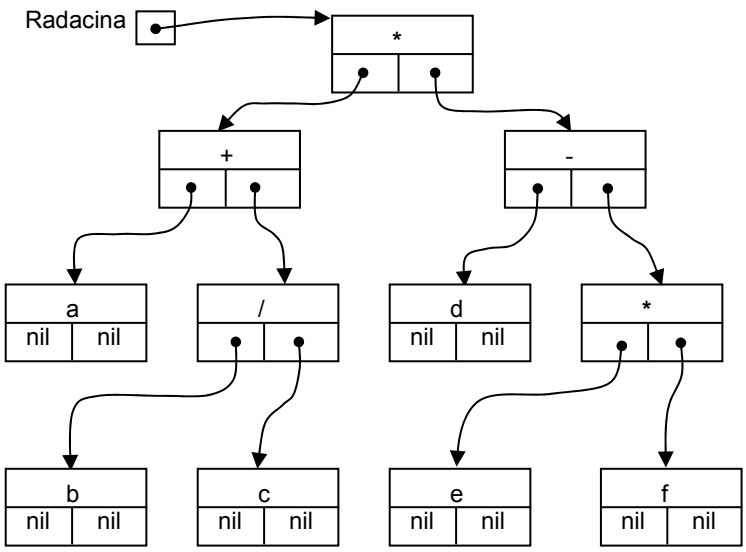


Fig.8.2.4.2.a. Arbore binar reprezentat cu ajutorul pointerilor

8.2.5. Traversarea arborilor binari

- Referitor la **tehnicile de traversare** a **arborilor binari** se face precizarea că ele derivă direct prin **particularizare** din tehnicile de traversare a **arborilor generalizați**.

- În consecință şi în acest caz se disting tehnicile bazate pe **căutarea în adâncime** (preordine, inordine şi postordine) precum şi tehnica **căutării prin cuprindere**.

8.2.5.1. Traversarea arborilor binari prin tehnici bazate pe căutarea în adâncime

- Traversarea în adâncime **(depth first)**, aşa cum s-a precizat şi în cadrul arborilor generalizați, presupune **parcurgerea în adâncime** a arborelui binar atât de departe cât se poate plecând de la rădăcină.

- Când s-a ajuns la o frunză, **se revine** pe drumul parcurs la proximul nod care are fii neexplorați şi parcurgerea se reia în aceeaşi manieră până la traversarea integrală a structurii.

- Schema este bună dar presupune **memorarea** drumului parcurs, ca atare necesită fie o **implementare recursivă** fie utilizarea unei **stive**.

- **Traversarea în adâncime** are trei variante: **preordine**, **inordine** şi **postordine**.

- Considerentele avute în vedere la traversarea arborilor generalizaţi rămân valabile şi pentru arborii binari.

- Astfel, referindu-ne la arborele binar din fig.8.2.5.1.a şi considerând pe R drept rădacină, iar pe `SS` şi `SD` drept subarborele său stâng, respectiv subarborele său drept, atunci cele **trei moduri de parcurgere** sunt evidenţiate de modelele recursive din secvenţa [8.2.5.1.a].

```
-------------------------------------------------------------
{Modele recursive pentru traversarea arborilor binari prin
tehnica căutării în adâncime}

Preordine(A) : R,Preordine(SS),Preordine(SD)
Inordine(A)  : Inordine(SS),R,Inordine(SD)        [8.2.5.1.a]
Postordine(A): Postordine(SS),Postordine(SD),R
-------------------------------------------------------------
```

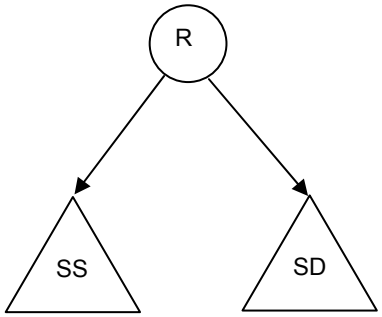


Fig.8.2.5.1.a. Model de arbore binar

- Traversarea unei structuri de date este de fapt o **ordonare liniară** a componentelor sale în baza unui anumit **protocol**.

- Spre **exemplu**, traversând arborele care memorează **expresia aritmetică** **`(a+b/c)*(d-e*f)`** din fig.8.2.1.b şi înregistrând caracterul corespunzător ori de câte ori este vizitat un nod se obţin următoarele ordonări:

    - Preordine: **`*+a/bc-d*ef`**
    - Inordine: **`a+b/c*d-e*f`**
    - Postordine: **`abc/+def*-*`**

- Se precizează faptul că ultima ordonare este cunoscută în matematică sub denumirea de **notaţie poloneză** (**postfix**).

- În continuare, cele trei metode de traversare vor fi concretizate în trei **proceduri recursive** în care:

    - `r` este o **variabilă** de tip pointer care indică rădăcina arborelui

    - `Viziteaza(r^)` reprezintă **operaţia** care trebuie executată asupra fiecărui nod.

- Considerând pentru structura de arbore binar definiţia din secvenţa [8.2.5.1.b], structura de principiu a celor trei metode de traversare este prezentată în [8.2.5.1.c].

```
-------------------------------------------------------------
{Traversarea arborilor binari}

TYPE RefTipNod=^TipNod;
     TipNod=RECORD
            {diferite câmpuri}                [8.2.5.1.b]
            stang,drept:RefTipNod
     END;
-------------------------------------------------------------
PROCEDURE Preordine(r:RefTipNod);
  BEGIN
    IF r<>nil THEN
      BEGIN
        Viziteaza(r^);
        Preordine(r^.stang);
        Preordine(r^.drept)
      END
  END; {Preordine}

PROCEDURE Inordine(r:RefTipNod);
  BEGIN
    IF r<>nil THEN
      BEGIN
        Inordine(r^.stang);                   [8.2.5.1.c]
        Viziteaza(r^);
        Inordine(r^.drept)
      END
  END; {Inordine}

PROCEDURE Postordine(r:RefTipNod);
  BEGIN
    IF r<>nil THEN
      BEGIN
        Postordine(r^.stang);
        Postordine(r^.drept);
        Viziteaza(r^)
      END
  END; {Postordine}
-------------------------------------------------------------
```

8.2.5.2. Traversarea arborilor binari prin tehnica căutării prin cuprindere

- Traversarea prin **cuprindere** (**breadth-first**) presupune traversarea tuturor nodurilor de pe un nivel al structurii arborelui, după care se trece la nivelul următor parcurgându-se nodurile acestui nivel ş.a.m.d până la epuizarea tuturor nivelurilor arborelui.

- În cazul arborilor binari, rămâne valabilă **schema de principiu** a parcurgerii prin cuprindere bazată pe utilizarea unei structuri de date **coadă** prezentată pentru arborii generalizați (secvența [8.1.3.2.a]) cu precizarea că nodurile pot avea cel mult **doi fii**.

- În continuare se prezintă o **altă variantă** de parcurgere care permite efectiv **evidențierea nivelurilor arborelui binar**, variantă care utilizează în tandem **două**

structuri de tip **coadă** (secvența [8.2.5.2.a]).

- La parcurgerea nodurilor unui nivel al arborelui binar, noduri care sunt memorate într-una din cozi, fiii acestora se adaugă celeilalte cozi.

- La terminarea unui nivel (golirea cozii curente parcurse), cozile sunt comutate şi procesul se reia până la parcurgerea integrală a arborelui binar, adică golirea ambelor cozi.

```
-------------------------------------------------------------
{Traversarea prin cuprindere unui arbore binar cu
evidenţierea nivelurilor acestuia}

procedure TraversarePrinCuprindereArboreBinar(r: TipNod)
  Coada1, Coada2: TipCoada;

  Initializeaza(Coada1); Initializeaza(Coada2);
  daca r nu este nodul vid atunci
    Adauga(r,Coada1); {procesul de amorsare}
repetă
  | cât timp NOT Vid(Coada1)execută
  |   r<-Cap(Coada1); Scoate(Coada1);
  |   *listeaza(r);
  |   dacă FiuStanga(r) nu este nodul vid atunci
  |     Adauga(FiuStanga(r),Coada2);
  |   dacă FiuDreapta(r) nu este nodul vid atunci
  |     Adauga(FiuDreapta(r),Coada2);
  |  □
  | cât timp NOT Vid(Coada2)execută              [8.2.5.2.a]
  |   r<-Cap(Coada2); Scoate(Coada2);
  |   *listeaza(r);
  |   dacă FiuStanga(r) nu este nodul vid atunci
  |     Adauga(FiuStanga(r),Coada1);
  |   dacă FiuDreapta(r) nu este nodul vid atunci
  |     Adauga(FiuDreapta(r),Coada1);
  |  □
 până când Vid(Coada1) AND Vid(Coada2)
 □
-------------------------------------------------------------
```

8.2.6 Aplicații ale arborilor binari

- Dintre aplicațiile specifice arborilor binari se prezintă câteva considerate mai reperezentative:

  - Construcția unui arbore binar de **înalțime minină**,

  - Generarea unui arbore binar pornind de la specificarea sa în **preordine**

  - Construcția unui **arbore de parcurgere**.

8.2.6.1. Construcția şi reprezentarea grafică a unui arbore binar de înălțime minimă

- Se presupune că arborele binar ce trebuie construit conține noduri încadrate în tipul clasic definit în secvența [8.2.4.2.b], în care cheile nodurilor sunt `n` **numere** care **se citesc** din fişierul de intrare.

- Restricția care se impune este aceea, ca arborele construit să aibă **înălțimea minimă**.

- Pentru aceasta este necesar ca **fiecărui nivel** al structurii să-i fie alocate **numărul maxim** de noduri posibile, cu excepția nivelului de bază.

- Acest lucru poate fi realizat prin **distribuirea** în mod egal a nodurilor care se introduc în structură pe **stânga** respectiv pe **dreapta** fiecărui nod deja introdus.

- **Regula** după care se asigură distribuția egală pentru un număr cunoscut de noduri `n` poate fi formulată simplu în **termeni recursivi**:

  1° Se ia un nod drept rădăcină;

  2° Se generează subarborele stâng cu `ns=n DIV 2` noduri;

  3° Se generează subarborele drept cu `nd=n-ns-1` noduri.

- Acest algoritm, permite construcția simplă a unui arbore binar de înalțime minimă.

- Un **arbore binar** este considerat **perfect echilibrat** dacă pentru fiecare nod, numărul de noduri al subarborelui stâng diferă de cel al subarborelui drept cu **cel mult** o unitate.

- În mod evident că **arborele de înalțime minimă** construit de către acest algoritm este unul **perfect echilbrat**.

- Implementarea algoritmului **varianta C** apare în secvența [8.2.7.1.a].

  - Cheile nodurilor se introduc de la tastatură.

  - Prima valoare introdusă este numărul total de noduri `n`.

  - Sarcina construcției efective a arborelui binar revine funcției **`Arbore`** care:

    - Primeşte ca parametru de intrare numărul de noduri `n`,
    - Determină numărul de noduri pentru cei doi subarbori,
    - Citeşte cheia nodului rădăcină,
    - Construieşte în manieră recursivă arborele,
    - Returnează referința la arborele binar construit.

```
//Construcţie arbore binar de înălţime minimă

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>

typedef struct nod                                  [8.2.7.1.a]
          {
               int cheie;
               struct nod* stang;
               struct nod*    drept;
          }NOD;

int n;
```

```
NOD* radacina;

NOD* Arbore( int n )
{
     //constructie arbore perfect echilibrat cu N noduri
     NOD* NodNou;
     int x, ns, nd;

     if ( n == 0 )
          return NULL;

     ns = n / 2;                                   [8.2.7.1.a]
     nd = n - ns - 1;
     scanf( "%d", &x );

     if (  ( NodNou = (NOD *)malloc( sizeof( NOD ) ) ) ==
     NULL )
     {
          printf("Eroare la malloc");
          return NULL;
     }
     NodNou->cheie = x;
     NodNou->stang = Arbore( ns );  //completare inlantuire
     NodNou->drept = Arbore( nd );  //completare inlantuire
     return NodNou;
}//Arbore

void Afiseaza_Arbore( NOD* t, int h)
{
     //afiseaza arborele t
     int i;
     if ( t != NULL )
     {
          Afiseaza_Arbore( t->stang, h - 5 );
          for(i = 0; i < h; i++) printf( " " );
          printf( "%d\r\n", t->cheie );
          Afiseaza_Arbore( t->drept, h - 5 );
     }//if
}//Afiseaza_Arbore


int main( int argc, char** argv )
{
     printf( "n=" );
     scanf("%d", &n); //numărul total de noduri
     radacina = Arbore( n );
     Afiseaza_Arbore( radacina, 50 );
     return 0;
}//main
```

- Funcția `AfiseazaArbore` realizează **reprezentarea grafică** a unei structuri de arbore binar răsturnat (rotit cu 90^o în sensul acelor de ceasornic), conform următoarei **specificații**:

  1^o Pe fiecare rând se afişează **exact un nod**;

  2^o Nodurile sunt ordonate de sus în jos în **inordine**;

3º Dacă un nod se afişează pe un rând precedat de `h` blancuri, atunci fiii săi (dacă există) se afişează precedaţi de `h-d` blancuri. `d` este o variabilă a cărei valoare este stabilită de către programator şi precizează **distanţa** dintre nivelurile arborelui;

4º Pentru **rădăcină**, se alege o valoare corespunzătoare a lui `h`, ţinând cont că arborele se dezvoltă spre stânga.

- Această modalitate de reprezentare grafică a arborilor binari este una dintre cele mai **simple** şi **imediate**, ea recomandându-se în mod deosebit în aplicaţiile didactice.

- Trebuie subliniat faptul că simplitatea şi transparenţa acestui program rezultă din utilizarea **recursivităţii**.

    - Aceasta reprezintă un **argument** în plus adus afirmaţiei, că algoritmii recursivi reprezintă modalitatea cea mai potrivită de prelucrare a unor structuri de date care la rândul lor sunt definite recursiv.

    - Acest lucru este demonstrat atât de către funcţia care **construieşte** arborele cât şi de către procedura de **afişare** a acestuia, procedură care este un exemplu clasic de parcurgere în inordine a unui arbore binar.

    - Avantajul utilizării unui algoritm recursiv, devine şi mai evident în comparaţie cu **soluţia nerecursivă** a aceleiaşi probleme.